На правах рукописи

Михеева Анна Игоревна

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С ПРЕПЯТСТВИЕМ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань — 2010

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики ФГАОУВПО “Казанский (Приволжский) федеральный университет”.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Даутов Рафаил Замилович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Чижонков Евгений Владимирович
	кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Игнатьева Марина Александровна
Ведущая организация:	Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

Защита диссертации состоится 28 октября 2010 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 при Казанском (Приволжском) федеральном университете: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан 27 сентября 2010 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор О. А. Задворнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория вариационных неравенств создавалась на стыке многих актуальных областей — вариационного исчисления, выпуклого анализа, теории уравнений с частными производными и других. В итоге возникла содержательная и глубокая теория, имеющая разнообразные приложения к естественным наукам и технике. В диссертации рассматриваются приближенные методы решения параболических вариационных неравенств с препятствием внутри области (с односторонним ограничением на решение), которые с теоретической точки зрения изучены существенно слабее, чем соответствующие эллиптические неравенства. В этих задачах, кроме самого решения, как теоретический, так и практический интерес, представляет коинцидентное множество решения; это неизвестное определяется после решения задачи как подмножество области определения решения, на котором решение примыкает к препятствию.

Методы регуляризации и штрафа позволяют свести вариационные неравенства с препятствием внутри области к соответствующим уравнениям. С их помощью доказывается существование решения, строятся приближенные сеточные схемы. В научной литературе известны многочисленные способы построения таких методов; они получаются из различных соображений и полезны также с обратной точки зрения (когда регуляризованная задача является исходной, а вариационное неравенство является ее приближением). Существующие способы получения оценок точности этих методов предполагают достаточную гладкость решения задачи и условие типа липшиц-непрерывности пространственного оператора. При построении приближенных методов традиционно используются простейшие сеточные схемы: сочетание неявной схемы Эйлера для дискретизации задачи по временной переменной и метода конечных элементов первого порядка точности для аппроксимации неравенства по пространственным переменным. Отсутствие гладкости решения, особенно по временной переменной, является серьезной проблемой при теоретическом исследовании точности сеточных схем и приводит к заниженным оценкам (по сравнению с параболическими уравнениями). В этом направлении отметим работы C. Johnson, F. Scarpini и M.A. Vivaldi, C. Vuik, A. Ženíšek, в которых для модельных задач получена оценка точности в энергетической норме порядка $O(\tau^{1/2} + h)$ вместо ожидаемой и оптимальной оценки $O(\tau + h)$. Для сеточных схем, полученных после дискретизации задачи со штрафом или регуляризованной задачи, проблема получения оптимальных оценок точности усугубляется из-за наличия дополнительного параметра; известные оценки точности подобных схем в энергетической норме также имеют порядок $O(\tau^{1/2} + h)$ при соответствующем выборе дополнительного параметра. Определение достаточно широкого класса задач, для которых приближенные методы (регуляризации, штрафа, сеточные схемы) имеют оптимальный порядок точности является актуальным вопросом как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Целями работы является построение и исследование приближенных методов решения квазилинейных параболических вариационных неравенств с препятствием внутри области. Основное внимание уделяется следующим вопросам:

1. новым определениям решения задачи (на основе операторов точного штрафа). Эти определения оказываются полезными как с точки зрения построения и исследования точности приближенных решений, так и с точки зрения исследования устойчивости коинцидентного множества решения;
2. построению и исследованию точности методов регуляризации задачи;
3. построению и исследованию точности полудискретных и полностью дискретных схем решения задачи; строятся новые схемы, а также уточняются оценки погрешности решения ряда известных схем.

Научная новизна результатов, изложенных в диссертации, состоит в следующем: для квазилинейных параболических вариационных неравенств с препятствием внутри области с монотонным пространственным оператором даны эквивалентные определения решения; на их основе исследованы методы штрафа и регуляризации, получены оценки устойчивости коинцидентного множества решения к возмущению правой части и начального условия; построен и исследован ряд сеточных схем решения задачи; получена оптимальная оценка точности этих схем в энергетической норме.

Достоверность полученных теоретических результатов обеспечивается строгими доказательствами сформулированных утверждений.

Научное и практическое значение работы. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты вносят вклад в развитие теории параболических вариационных неравенств с препятствием внутри области. Вместе с тем, доказанные оптимальные оценки точности для ряда сеточных схем, построенных на базе неявной схемы Эйлера и метода конечных элементов с численным интегрированием, заполняют имевшийся в научной литературе пробел в их математическом обосновании.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены, докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: Пятом всероссийском семинаре «Сеточные методы для краевых задач и приложения», посвященный 200-летию Казанского государственного университета, г. Казань, 17-21 сентября 2004 г.; Шестом всероссийском семинаре «Сеточные методы для краевых задач и приложения», г. Казань, 1-4 октября 2005 г.; Седьмой Казанской летней школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», г. Казань, 27 июня - 4 июля 2005 г.; Всероссийской молодёжной школе-конференции «Численные методы решения задач математической физики», г. Казань, 26 июня — 2 июля 2006 г; Седьмом всероссийском семинаре «Сеточные методы для краевых задач и приложения», 21 — 24 сентября 2007 г.; 51-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук», г. Москва, 28-30 ноября 2008 г.; на семинарах кафедры вычислительной математики Казанского университета (руководитель М.М. Карчевский), на итоговых научных конференциях Казанского университета.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 11 работах. Совместные работы выполнены в соавторстве с научным руководителем, которому в этих работах принадлежит постановка задач, выбор направлений и методов исследования.

Структура диссертационной работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы. Библиография включает 78 наименований. Общий объем диссертации составляет 124 страницы, в том числе 2 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, дан обзор литературы по теме исследования, определены цели и задачи исследования, приведена структура диссертации.

В **первой главе** исследуется квазилинейное параболическое вариационное неравенство с препятствием внутри области, формулируемое следующим образом: *найти функцию* $u \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ *такую, что* $u(0) = u_0$ и

$$(P) \qquad \langle u' + Au - f, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{K}.$$

Здесь и далее используются следующие обозначения: $\Omega \subset R^n$ – ограниченная связная область с липшицевой границей $\partial\Omega$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$; $H = L_2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $\widetilde{V} = H^1(\Omega)$, V^* – пространство сопряженное к V; $\mathcal{V} = L_2(0,T;V)$, $\mathcal{V}^*$ — сопряженное к $\mathcal{V}$; $\mathcal{H} = L_2(0,T;H)$, $\mathcal{W} = \{u \in \mathcal{V} :\ u' \in \mathcal{V}^*\}$, $\widetilde{\mathcal{W}} = \{v \in L_2(0,T;\widetilde{V}) : v' \in \mathcal{V}^*\}$ и $\mathcal{K} = \big\{u \in \mathcal{V} :\ u \geq \psi\big\}$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — отношение двойственности между $\mathcal{V}^*$ и $\mathcal{V}$.

Оператор $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ порождается квазилинейным эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка по правилу

$$\langle Au, v \rangle = \int\limits_Q \Big(\sum_{i=0}^n a_i(x,t,u,u_x) v_{x_i} + \lambda uv \Big)\, dx\, dt,$$

где $v_{x_0} = v$, $u_x = (u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n})$.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

(H_0') $\quad f \in \mathcal{V}^*, \quad u_0 \in L_2(\Omega)$;
(H_0'') $\quad \psi \in \widetilde{\mathcal{W}},\ \ \psi \leq 0$ п.вс. на Σ, $\quad \psi(0) \leq u_0$ п.вс. на Ω;
(H_0''') $\quad g = \psi' + A\psi - f \in \mathcal{V}^*$: $\langle g, v \rangle = \int\limits_Q g_Q v\, dxdt + \int\limits_\gamma g_\gamma v\, dxdt$,
где $\gamma \subset Q$ таково, что $\mathrm{mes}_{n+1}(\gamma) = 0$, $\mathcal{V}$ непрерывно вкладывается в $L_2(\gamma)$, $g_Q \in L_2(Q)$, $\ g_\gamma \in L_2(\gamma)$.

Далее через (H_0) обозначаются условия (H_0'), (H_0''), (H_0''').

На протяжении всей работы предполагается, что функции a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, удовлетворяют условиям Лере-Лионса $(H_1) - (H_3)$:

(H_1) *Условие Каратеодори.* Функции $a_i(\cdot, \cdot, \xi_0, \xi) : Q \to R$ измеримы для всех $(\xi_0, \xi) \in R \times R^n$ и $a_i(x,t,\cdot,\cdot) : R \times R^n \to R$ непрерывны для почти всех $(x,t) \in Q$. Кроме того, для почти всех $(x,t) \in Q$ и всех $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ справедливы оценки

$$a_i(x,t,0) = 0, \quad |a_i(x,t,\xi)| \leq \beta \sum_{j=0}^n |\xi_j|, \quad i = 0, 1, \ldots, n,\ \beta = \mathrm{const} > 0;$$

(H_2) *Условие эллиптичности.* Для почти всех $(x,t) \in Q$ и всех $\xi, \eta \in R^n$ и $\xi_0 \in R$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,t,\xi_0,\xi) - a_i(x,t,\xi_0,\eta))(\xi_i - \eta_i) > 0, \quad \xi \neq \eta;$$

(H_3) *Условие коэрцитивности.* Для почти всех $(x,t) \in Q$ и всех $\xi, \eta \in R^{n+1}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x,t,\xi)\,\xi_i \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - \lambda_0 \xi_0^2,$$

где постоянная $\alpha > 0$, $\lambda_0 = \mathrm{const} \leq \lambda$.

Дополнительно предполагается, что выполнено одно из следующих условий (H_4) или (H_4').

(H_4) *Условие монотонности.* Для почти всех $(x,t) \in Q$ и всех $\xi, \eta \in R^{n+1}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i(x,t,\xi) - a_i(x,t,\eta))(\xi_i - \eta_i) \geq -\lambda_0(\xi_0 - \eta_0)^2, \quad \lambda_0 = \mathrm{const} < \lambda.$$

(H_4') *Условие сильной-монотонности.* Для почти всех $(x,t) \in Q$ и всех $\xi, \eta \in R^{n+1}$ найдутся постоянные $\alpha > 0$ и $\lambda_0 < \lambda$ такие, что

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i(x,t,\xi) - a_i(x,t,\eta))(\xi_i - \eta_i) \geq \alpha \sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \eta_i)^2 - \lambda_0(\xi_0 - \eta_0)^2.$$

Примеры операторов, удовлетворяющих условиям $(H_1) - (H_4), (H_4')$ приведены в *п.1.2.* Известно, что задача (P) при выполнении условий $(H_0) - (H_3)$ имеет решение; условие (H_4) (или (H_4')) является достаточным для его единственности.

В *п. 1.4* доказано следующее свойство оператора A.

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия $(H_1) - (H_4)$ и заданы функции $u, v \in \widetilde{\mathcal{V}}$, причем, $(u-v)' \in \mathcal{V}^*$, $(u-v)^- \in \mathcal{V}$ и $(u-v)^-(0) = 0$. Тогда из оценки $\langle (u-v)' + Au - Av, (u-v)^- \rangle \geq 0$ следует, что $u \geq v$.*

Здесь u^- (u^+) — отрицательная (положительная) часть u. На основании утверждения 1 доказана теорема сравнения решений по начальному условию

u_0, правой части f и препятствию ψ, а также оценка устойчивости решения в энергетической норме

$$\|u\|_{E(0,T)} = \|u\|_{L_\infty(0,T;H)} + \|u\|_{\mathcal{V}}$$

к возмущению u_0 и f при условии (H_4').

Во *втором параграфе* предлагаются две эквивалентные формулировки исходной задачи; в основе их лежат идеи работы Р.З. Даутова[1] для эллиптических неравенств.

Определяется функционал $j : \mathcal{V} \to R$ по правилу

$$j(v) = \langle q, (v-\psi)^- \rangle = \int\limits_Q q_Q (v-\psi)^- \, dxdt + \int\limits_\gamma q_\gamma (v-\psi)^- \, dxdt,$$

где $q_Q \in L_2(Q)$, $g_\gamma \in L_2(\gamma)$, $q_Q \geq g_Q^+$, $q_\gamma \geq g_\gamma^+$. Он является выпуклым, липшиц-непрерывным и неотрицательным на $\mathcal{V}$, причем $j(v) = 0$ для $v \in \mathcal{K}$. В *п. 2.1* доказывается

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (H_0) — (H_4). *Тогда задача* (P) *эквивалентна следующей задаче: найти* $u \in \mathcal{W}$ *такую, что*

$$(P_0) \quad u(0) = u_0 \quad и \quad \langle u' + Au - f, v - u \rangle + j(v) - j(u) \geq 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{V}.$$

В *п. 2.2* обсуждаются вопросы, связанные с исследованиями регулярности решения исходной задачи; приводится обзор работ в этом направлении, в частности, отмечаются работы, в которых формулируются достаточные условия на данные задачи, гарантирующие принадлежность решения пространству

$$H^{2,1}(Q) = \{u \in L_2(0,T;H^2(\Omega)) : \; u' \in L_2(0,T;L_2(\Omega))\}.$$

В *п. 2.3* вводится понятие регулярной задачи. Для этого выделяется класс операторов, обладающих следующим свойством:

$(\mathcal{A})$ если $u \in W = L_2(0,T;H^2(\Omega))$, то $Au \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ и

$$Au = Av \quad \text{п.вс. на} \quad E = \big\{(x,t) \in Q : \; u(x,t) = v(x,t)\big\}, \quad u, v \in W.$$

[1] Даутов Р. З. Об операторах точного штрафа для эллиптических вариационных неравенств с препятствием внутри области // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 6. С. 1008–1017.

Определение 1. *Задача (P) называется регулярной, если выполнены условия (H_0) — (H_4), $u_0 \in V$, $f, g \in L_2(Q)$, $\psi \in H^{2,1}(Q)$, оператор A обладает свойством $(\mathcal{A})$, и, кроме того, решение задачи $u \in H^{2,1}(Q)$.*

Пусть $\theta(s) = 1$ при $s \leq 0$, $\theta(s) = 0$ при $s > 0$. Доказана следующая

Теорема 2. *Задача (P) эквивалентна уравнению*

$$(P_1) \quad u' + Au - g^+\theta(u - \psi) = f \quad \text{п.вс. в } Q, \quad u(0) = u_0,$$

при выполнении одного из следующих условий:

а) выполнены условия (H_0) — (H_4), $\psi', A\psi, f, u' \in L_2(Q)$, $\mathrm{mes}_{n+1}(F) = 0$, где $F = \partial\{(x,t) \in \overline{Q} : u(x,t) = \psi(x,t)\} \cap Q$ — свободная граница;

б) задача (P) является регулярной.

В *третьем параграфе* изучаются методы регуляризации задачи (P), построенные на основе эквивалентных формулировок (P_0) и (P_1). На протяжении всего параграфа предполагается, что выполнено следующее условие:

(H_5) для постоянного $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\langle A(u + \varepsilon), v \rangle \geq \langle Au, v \rangle \quad \forall\, u, v \in \mathcal{V}, \ v \geq 0 \text{ п.вс. в } Q.$$

Поскольку $v^- = \int\limits_v^0 \theta(s)ds$, то сглаживанием функции θ получаются регуляризованные задачи как для задачи (P_0), так и для задачи (P_1). Функция θ сглаживается липшиц-непрерывными невозрастающими на R функциями θ_ε так, что $\theta_\varepsilon(s) = \theta(s)$ при $s \leq -\varepsilon_1$ и $s \geq \varepsilon_2$, $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $\varepsilon_i \geq 0$. Тогда для $\eta \in \mathcal{V}$:

$$j_\varepsilon(\eta) = \int\limits_Q q_Q \varphi_\varepsilon(\eta - \psi)\, dx\, dt + \int\limits_\gamma q_\gamma \varphi_\varepsilon(\eta - \psi)\, dx\, dt, \quad \varphi_\varepsilon(\lambda) = \int\limits_\lambda^0 \theta_\varepsilon(s)\, ds.$$

Регуляризованная задача записывается следующим образом: найти $u_\varepsilon \in \mathcal{W}$ такую, что

$$u_\varepsilon(0) = u_0, \quad \langle u_\varepsilon' + Au_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon \rangle + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{V}.$$

Хорошо известно, что эта задача, в силу дифференцируемости j_ε, эквивалентна следующей:

$$(P_\varepsilon) \quad u_\varepsilon \in \mathcal{W} : \quad u_\varepsilon' + Au_\varepsilon + B_\varepsilon u_\varepsilon = f, \quad u_\varepsilon(0) = u_0,$$

где $\langle B_\varepsilon u, v\rangle = \langle j'_\varepsilon(u), v\rangle = -\int\limits_Q q_Q\theta_\varepsilon(u-\psi)v\,dx\,dt - \int\limits_\gamma q_\gamma\theta_\varepsilon(u-\psi)v\,dx\,dt$. Условия $(H_0)-(H_4)$ гарантируют существование и единственность решения (P_ε).

При выполнении условий (H_0)—(H_5) в *п. 3.1* доказана оценка

$$u-\varepsilon_1 \le u_\varepsilon \le u+\varepsilon_2 \quad \text{п.вс. в } Q.$$

При условиях (H_0) — (H_3), (H'_4) и (H_5) в *п. 3.2* доказана оценка

$$\|u-u_\varepsilon\|_{L_2(0,T;V)} \le c\,\varepsilon^{1/2}.$$

В *п. 3.3* последняя оценка уточняется в том случае, когда задача является регулярной и регуляризация имеет специальный вид. Доказана

Теорема 3. *Пусть задача (P) является регулярной, выполнены условия (H_0) — (H_3), (H'_4) и (H_5), $\varepsilon_1 = 0$ и $q = g^+$. Тогда*

$$\|u-u_\varepsilon\|_{L_2(0,T;V)} \le c\,\varepsilon^{1/2}\ \mathrm{mes}_{n+1}^{1/4}(I_\varepsilon)\ \|g^+\|_{L_2(I_\varepsilon)}^{1/2},$$

где $I_\varepsilon = \{(x,t)\in\bar Q : 0 < u(x,t)-\psi(x,t) < \varepsilon\}$.

В условиях теоремы 3 справедлива оценка $\|u-u_\varepsilon\|_{L_2(0,T;V)} = o(\varepsilon^{1/2})$. Функция $\mu(\varepsilon) = \mathrm{mes}_{n+1}(I_\varepsilon)$ при малых ε характеризует скорость схода решения с препятствия в окрестности свободной границы.

Определение 2. *Решение вариационного неравенства (P) называется невырожденным по мере с показателем β, если существуют ε_0 и c такие, что для любых $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ справедлива оценка*

$$\mathrm{mes}_{n+1}(I_\varepsilon) \le c\,\varepsilon^\beta.$$

Если выполнены условия теоремы 3 и решение неравенства (P) является невырожденным по мере с показателем β, то

$$\|u-u_\varepsilon\|_{L_2(0,T;V)} = c\,\varepsilon^{(2+\beta)/4}, \quad \text{если } g^+\in L_2(Q),$$
$$\|u-u_\varepsilon\|_{L_2(0,T;V)} = c\,\varepsilon^{(1+\beta)/2}, \quad \text{если } g^+\in L_\infty(Q).$$

Известно, что для однофазной задачи Стефана $\beta = 1/2$.

В *п. 3.4* показывается, что полученные оценки переносятся на два варианта метода штрафа с оператором штрафа:

$$\text{(а)}\ \ B_\varepsilon(u) = -\frac{q}{\varepsilon}\,(u-\psi)^-, \quad \text{(б)}\ \ B_\varepsilon(u) = -\frac{q}{\varepsilon}\,(u-\psi-\varepsilon)^-,$$

где либо $q = \|g^+\|_{L_\infty(Q)}$, либо $q = g^+$. Показывается, что теорема 3 справедлива для оператора штрафа типа (б) при выборе $q = g^+$.

В *четвертом параграфе* предлагается «энергетическая» техника исследования устойчивости коинцидентного множества решения задачи к возмущению данных f и u_0. Пусть u и $\hat{u}$ — решения регулярных вариационных неравенств (P) с правыми частями f и $\hat{f}$ и начальными данными u_0 и $\hat{u}_0$ соответственно, а $I(u) = \{(x,t) \in Q : u(x,t) = \psi(x,t)\}$ и $I(\hat{u})$ — соответствующие им коинцидентные множества. Задача состоит в оценке $(n+1)$-мерной меры Лебега симметрической разности коинцидентных множеств

$$\Delta I = I(\hat{u}) \triangle I(u) = (I(\hat{u}) \cup I(u)) \setminus (I(\hat{u}) \cap I(u)).$$

Идея исследования базируется, во-первых, на формулировке неравенства в виде операторного уравнения (P_1),

$$u' + Au - g^+\theta(u-\psi) = f,$$

и замечании о том, что функция $\chi = \chi(u) = \theta(u-\psi)$, определенная в Q, представляет собой характеристическую функцию множества $I(u)$; во-вторых, на равенстве

$$\operatorname{mes}_{n+1} \Delta I = \int\limits_Q |\chi(\hat{u}) - \chi(u)|\, dxdt.$$

Исследования проводятся в предположении

(G) $\qquad g, \hat{g} \in G = \{g \in L_2(Q) :\ g \geq c_g = \mathrm{const} > 0 \text{ в } Q\}.$

В *п. 4.1* доказана

Теорема 4. *Пусть задача (P) является регулярной и выполнены условия (H_0)–(H_3), (H_4'), (G) и оператор A является липшиц-непрерывным*

(H_6) $\qquad |\langle Au - Av, w\rangle| \leq c\,\|u-v\|_{\mathcal{V}}\|w\|_{\mathcal{V}}, \quad u, v, w \in \mathcal{V}.$

Тогда для любого компакта $E \subset \Omega$ справедлива оценка

$$\operatorname{mes}_{n+1}(\Delta I \cap \{E \times [0,T]\}) \leq c\,\operatorname{cap}_\Omega(E)\,\big(\|\hat{u}_0 - u_0\|_H + \|\hat{f} - f\|_{\mathcal{H}}\big),$$

где $\operatorname{cap}_\Omega(E)$ — емкость компактного множества $E \subset \Omega$ относительно Ω

$$\operatorname{cap}_\Omega(E) = \inf\{\ \|v\|_V :\ v \in V,\ v \geq \chi_E \ \text{в}\ \Omega\},$$

χ_E есть характеристическая функция множества E.

Далее показано, что в условиях теоремы 4, если $\psi \le \text{const} < 0$ на $\partial\Omega \times (0,T)$ и $f, \hat{f} \in \{f \in L_2(Q) : f_0 \le f \le \psi' + A\psi - c_g$ в $Q\}$, где f_0 — фиксированная функция из $L_2(Q)$, то

$$\text{mes}_{n+1}(I(\hat{u})\triangle I(u)) \le c\left(\|\hat{u}_0 - u_0\|_H + \|\hat{f} - f\|_{L_2(Q)}\right).$$

В *п. 4.2* доказана

Теорема 5. *Пусть задача* (P) *является регулярной и выполнены условия* $(H_0) - (H_4)$, (G) *и для любого* $\varepsilon > 0$ *и любых* $u, v \in \mathcal{V}$ *справедливо неравенство*

$$\langle Au - Av, \text{sign}_\varepsilon(u - v)\rangle \ge 0,$$

где sign_ε *есть регуляризация многозначной функции* $\text{sign} : R \to 2^R$*:*

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} -1, & s < 0, \\ [-1, 1], & s = 0, \\ 1, & s > 0, \end{cases} \qquad \text{sign}_\varepsilon(s) = \begin{cases} -1, & s < -\varepsilon, \\ s/\varepsilon, & |s| \le \varepsilon, \\ 1, & s > \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда $\text{mes}_{n+1}(I(\hat{u})\triangle I(u)) \le \left(\|\hat{u}_0 - u_0\|_{L_1(\Omega)} + \|\hat{f} - f\|_{L_1(Q)}\right)/c_g$.

Во **второй главе** строятся и исследуются три типа сеточных схем для приближенного решения исходной задачи. Две из них являются известными и получаются аппроксимацией либо исходного неравенства (P), либо регуляризованной задачи (P_ε) (задачи со штрафом). Третья схема является новой и получаются аппроксимацией задачи (P_0).

В *первом параграфе* исследуется существование, гладкость решения решения и неявная схема Эйлера для абстрактного эволюционного неравенства параболического типа: *найти* $u(t) \in D(\phi)$ *такую, что* $u(0) = u_0$ *и для п.вс.* $t \in (0, T)$ *и любых* $v \in D(\phi)$ *справедливо неравенство*

$$(P_a) \quad \langle u'(t) + A(t)u(t) - f(t), v - u(t)\rangle + \phi(t, v) - \phi(t, u(t)) \ge 0.$$

Исследование обобщает результаты работы G. Savaré[2], в которой аналогичные вопросы рассмотрены для линейных операторов A в случае $\phi(t, v) = \phi(v)$. Предполагается, что выполнены условия A_1)—A_6):

[2]Savaré G. Approximation and regularity of evolution variational inequalities // Rnd.Acc. Naz. Sci. dei XL, Memorie di Matematica. 1993. Vol. XVII. Pp. 83–111.

$A_1)$ V, H есть сепарабельные гильбертовы пространства, вложения $V \subset H \equiv H^* \subset V^*$ непрерывны и плотны; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — отношение двойственности между V^* и V; $\mathcal{V} = L_2(0,T;V)$, $\mathcal{V}^* = L_2(0,T;V^*)$.

$A_2)$ $A(t)0 = 0$; для любых $u, v \in V$ и п.вс. $t \in [0,T]$ справедливы оценки

$$\langle A(t)u - A(t)v, u - v \rangle \geq \alpha \|u - v\|_V^2, \ \alpha = \mathrm{const} > 0,$$
$$\|A(t)u - A(t)v\|_{V^*} \leq m_0(t)\|u - v\|_V, \quad \|A'(t)v\|_{V^*} \leq m_1(t)\|v\|_V,$$

причем $M = \|m_0\|_{L_2(0,T)} + \|m_1\|_{L_2(0,T)} < \infty$.

$A_3)$ Функционал $v \to \phi(t,v)$ является собственным выпуклым и полунепрерывным снизу на V при каждом $t \in [0,T]$, а его эффективная область определения $D(\phi) = \{v \in V : \phi(t,v) < \infty\}$ не зависит от t; $0 \in D(\phi)$.

$A_4)$ Пусть $\chi : [0,T] \to V^*$ есть субградиент ϕ в нуле, т.е. $\phi(t,v) - \phi(t,0) \geq \langle \chi(t), v \rangle \ \forall\, v \in D(\phi)$. Тогда $\chi \in H^1(0,T;V^*)$.

$A_5)$ Пусть $\phi_t(t,u) = d\phi(t,u)/dt$, $u \in D(\phi)$. Тогда для $\forall\, u, v \in \mathcal{D}(\phi) = \{v \in L_2(0,T;V) : \phi(t,v(t)) \in L_1(0,T)\}$

$$\int\limits_0^T |\phi_t(t,u(t)) - \phi_t(t,v(t))|\, dt \leq \varrho(\|u\|_{\mathcal{V}}, \|v\|_{\mathcal{V}})\, \|u - v\|_{\mathcal{V}},$$

где функция ϱ непрерывна и не убывает по каждому аргументу.

$A_6)$ $f \in H^1(0,T;V^*)$, $u_0 \in D(\phi)$, $C_0 = \|u_0\|_V + \inf\limits_{v \in M(u_0,f)} \|v\|_H < \infty$, где множество $M(u_0,f)$ является непустым,

$$M(u_0,f) = \{w \in H : \langle w + A(0)u_0 - f(0), v - u_0 \rangle +$$
$$+ \phi(0,v) - \phi(0,u_0) \geq 0 \ \ \forall\, v \in D(\phi)\}.$$

Неявная схема Эйлера при равномерном разбиении отрезка $[0,T]$ на N частей записывается следующим образом: *найти* $y^n \in D(\phi)$ *такие, что для* $n = \overline{0,N}$ *справедливы неравенства*

$$(P_{a\tau}) \quad \langle (y^n - y^{n-1})/\tau + A^n y^n - f^n, v - y^n \rangle + \phi^n(v) - \phi^n(y^n) \geq 0 \quad \forall\, v \in D(\phi),$$

где $y^{-1} = u_0$, $\tau = T/N$, $\phi^n(v) = \phi(t_n, v)$, $A^n = A(t_n)$, $f^n = f(t_n)$.

В *п. 1.1* получены следующие априорные оценки:

$$\|y^0 - u_0\|_H^2 + \alpha\tau\|y^0 - u_0\|_V^2 \le C_0^2\tau^2,$$
$$\|y_\tau\|_{E(0,T)} \le C, \quad \|\hat{y}_\tau\|_{E(0,T)} \le C, \quad \|\hat{y}'_\tau\|_{E(0,T)} \le C,$$

где y_τ и $\hat{y}_\tau$ кусочно-постоянное и кусочно-линейное восполнение y^n соответственно, $C = C(T, \alpha, C_0, \|f\|_{H^1(0,T;V^*)}, M, \varrho)$. На их основе доказано

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия $A_1)$–$A_6)$, тогда для всех $t \in [0, T]$ и $v \in D(\phi)$ справедливо неравенство*

$$\langle \hat{y}'_\tau + A(t)\hat{y}_\tau - f, v - \hat{y}_\tau\rangle + \phi(t, v) - \phi(t, \hat{y}_\tau) \ge -R_\tau(t, v),$$

причем, если $v \in \mathcal{D}(\phi)$, то найдется такая постоянная C, зависящая от $\|v\|_{\mathcal{V}}$, что

$$\int_0^T R_\tau(t, v(t))\,dt \le C\,(\tau^2 + \tau\,\|\hat{y}_\tau - v\|_{\mathcal{V}}).$$

Теорема 6. *При условиях $A_1) - A_6)$ справедливы утверждения:*

a) решение u задачи (P_a) существует, единственно и принадлежит пространству $H^1(0, T; V) \cap W^1_\infty(0, T; H)$;

b) пусть u и $\bar{u}$ есть решения задачи (P_a), соответствующие входным данным $\{u_0, f\}$ и $\{\bar{u}_0, \bar{f}\}$ соответственно. Тогда

$$\|\bar{u} - u\|_{E(0,T)} \le c\,(\|\bar{u}_0 - u_0\|_H + \|\bar{f} - f\|_{\mathcal{V}^*});$$

c) если $\hat{y}_\tau$ кусочно-линейное восполнение решения неявной схемы Эйлера $(P_{a\tau})$, то $\|u - \hat{y}_\tau\|_{E(0,T)} \le c\,\tau$.

Во *втором параграфе* изучается сеточная схема, построенная на базе исходной задачи (P); исследование опирается на полученные для абстрактного неравенства результаты первого параграфа. На протяжении *второго* и *третьего параграфа* предполагается, что $\Omega \subset R^n$, $n = 2$, Ω имеет кусочно-гладкую границу класса C^3, оператор A определяется формулой

$$\langle Au, v\rangle = \int_0^T \int_\Omega \Big(\sum_{i=0}^n a_i(x, t, u, u_x) v_{x_i}\Big) dx dt,$$

а функции $a_i(x,t,\xi)$, $i=\overline{0,n}$, $\xi \in R^{n+1}$, удовлетворяют условиям (R_1)—(R_2):

(R_1) $a_i(x,t,\xi) \in W^1_\infty(\Omega) \times W^1_\infty(0,T) \times C^1(R^{n+1})$, $a_i(x,t,0)=0$;
для любых $(x,t) \in \bar{Q}$ и $\xi, \eta \in R^{n+1}$ справедливы оценки:

$$|\partial a_i(x,t,\xi)/\partial t| + |\partial a_i(x,t,\xi)/\partial x_j| \le \beta\,|\xi|.$$

(R_2) Для любых $(x,t) \in \bar{Q}$, ξ, $\eta \in R^{n+1}$ с постоянными $\alpha, \beta > 0$ справедливы неравенства:

$$|a_i(x,t,\xi) - a_i(x,t,\eta)| \le \beta\,|\xi - \eta|,$$
$$\sum_{i=0}^{n} \big(a_i(x,t,\xi) - a_i(x,t,\eta)\big)\big(\xi_i - \eta_i\big) \ge \alpha|\xi-\eta|^2.$$

Дополнительно предполагаются выполненными условия (R_3)—(R_4):

(R_3) Функция ψ не зависит от t, $\psi \in H^2(\Omega)$, $\psi \le 0$ на $\bar{\Omega}$;
$u_0 \in H^2(\Omega)$, $u_0 \ge \psi$ на Ω; $f \in H^1(0,T;W^1_p(\Omega))$, $p>2$.

(R_4) $u \in H^1(0,T;V) \cap W^1_\infty(0,T;H)$, $\quad u \in L_2(0,T;H^2(\Omega))$.

В *п. 2.1* вводится пространство конечных элементов, определяются необходимые квадратурные формулы. Пусть V_h (H^1_h) — стандартная аппроксимация $V = H^1_0(\Omega)$ $(H^1(\Omega))$ на основе криволинейных треугольных конечных элементов первой степени. Пространство V_h со скалярным произведением и нормой $(u_h,v_h)_{H_h} = S_{\Omega v}\big(u_h v_h\big)$, $\|u_h\|_{H_h} = (u_h,u_h)^{1/2}_{H_h}$, обозначается через H_h, где $S_{\Omega v}$ — составная квадратура по вершинам конечных элементов; отношение двойственности между V^*_h и V_h обозначается через $\langle\cdot,\cdot\rangle_h$. Пространство H^*_h отождествляется с H_h (согласно теореме Рисса), поэтому $V_h \subset H_h \subset V^*_h$, причем $\langle f, v_h\rangle_h = (f,v_h)_{H_h}$, если $f \in H_h$.

В *п. 2.2* составляющие задачи (P) аппроксимируются следующим образом:

$$K_h = \{v_h \in V_h : v_h(x) \ge \psi_I(x), x \in \bar{\Omega}\},$$

где ψ_I — H^1_h-интерполянт функции ψ. Оператор $A_h(t) : H^1_h \to V^*_h$ для $t \in [0,T]$ определяется равенством

$$\langle A_h(t)u, v\rangle_h = S_{\Omega c}\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i(x,t,u,u_x)v_{x_i}\Big), \quad u \in H^1_h,\ v \in V_h,$$

а также функционал $f_h(t) \in V^*_h$:

$$\langle f_h(t), v\rangle_h = S_{\Omega c}\big(f(t)\,v\big), \quad v \in V_h,$$

где $S_{\Omega c}$ — составная квадратура по центрам тяжести конечных элементов.

Рассматривается полудискретная задача (метод прямых): *найти функцию $u_h \in L_2(0,T;V_h)$ такую, что $u_h(0) = u_{0I} \in K_h$ и для п.вс. $t \in (0,T)$*

$$(P_h) \quad u_h(t) \in K_h, \quad \langle u_h'(t) + A_h(t)u_h(t) - f_h(t), v - u_h(t)\rangle_h \geq 0 \quad \forall\, v \in K_h.$$

Показывается, что при выполнении условий $(R_1) - (R_4)$, задача (P_h) вкладывается в класс задач (P_a), а для данных задачи справедливы условия $A_1) - A_6)$ равномерно по h, и к ней применимы результаты теоремы 6; таким образом, решение задачи (P_h) существует, единственно и принадлежит пространству $H^1(0,T;V_h) \cap W^1_\infty(0,T;H_h)$.

В *п. 2.3* исследуется точность метода прямых. Если u и u_h — решения задач (P) и (P_h) соответственно и выполнены условия (R_1) – (R_4), то

$$\|u - u_h\|_{E(0,T)} \leq c \inf_{v\in\mathcal{K}} \|u_h - v\|^{1/2}_{\mathcal{H}} + \inf_{v_h\in\mathcal{K}_h} \Big(\|u - v_h\|_E + \|u - v_h\|^{1/2}_{\mathcal{H}} + \\ + \|u' - v_h'\|_{\mathcal{H}} + \|u_{0I} - v_h(0)\|_H + \|E_L(t, v_h(t))\|_{L_2(0,T)} \Big),$$

где $E_L(t, v(t)) = \sup_{w\in V_h\setminus\{0\}} |E_L(t; v(t), w)|/\|w\|_V$ и

$$E_L(t; v, w) = \langle v' + A(t)v - f(t), w\rangle - \langle v' + A_h(t)v - f_h(t), w\rangle_h, \quad v(t), w \in V_h.$$

В *п. 2.5* получены оценки для каждого члена, составляющего погрешность аппроксимации. Доказана

Теорема 7. *Пусть u и u_h — решения задач (P) и (P_h) соответственно и выполнены условия (R_1) – (R_4). Тогда $\|u - u_h\|_{E(0,T)} \leq c\,h$.*

Сеточная схема для задачи (P) получается после дискретизации по t полудискретной задачи (P_h) неявной разностной схемой: *найти $u_{h\tau} : \omega_\tau \to V_h$ такую, что $u_{h\tau}(t_{-1}) = u_{0I}$ и для $n = \overline{0, N}$*

$$(P_{h\tau}) \quad u_{h\tau}(t_n) \in K_h, \quad \langle u_{h\tau}(t_n) - u_{h\tau}(t_{n-1}) + \tau A_h(t_n)u_{h\tau}(t_n) - \\ - \tau f_h(t_n), v - u_{h\tau}(t_n)\rangle_h \geq 0 \quad \forall\, v \in K_h,$$

где $\tau = T/N$, $\omega_\tau = \{t_n, n = \overline{0, N}\}$.

Пусть $\hat{u}_{h\tau}$— кусочно-линейное восполнение сеточной функции $u_{h\tau}$. Доказана

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* $(R_1)-(R_4)$. *Тогда решение* $u_{h\tau}$ *задачи* $(P_{h\tau})$ *существует и определяется единственным образом. Кроме того, если* u *— решение задачи* (P), *то* $\|u-\hat{u}_{h\tau}\|_{E(0,T)} \le c\big(h+\tau\big)$.

В *третьем параграфе* аналогичным образом исследуются две схемы, построенные на основе неравенства (P_0) и регуляризованного неравенства (P_ε). Предполагается, что функция q в определении функционала j и j_ε обладает следующей гладкостью:

$$(R_5) \qquad\qquad q \in H^{1,1}(Q).$$

Аппроксимация пространств и данных задачи проводится также как во втором параграфе. Функционал j_ε аппроксимируется следующим образом

$$j_{\varepsilon h}(t,\eta) = \int\limits_\Omega q^h(t)\varphi_\varepsilon(\eta-\psi_I)\,dx,$$

где $q^h(t)$ есть кусочно-постоянная функция равная $\int\limits_e q(x,t)\,dx/|e|$ на каждом конечном элементе e для всех $t \in [0,T]$.

В *п. 3.1* изучается метод прямых для задачи (P_ε) и (P_0): *найти функцию* $u_h \in L_2(0,T;V_h)$ *такую, что* $u_h(0)=u_{0I}$ *и для п.вс.* $t \in (0,T)$

$$(P_{\varepsilon h}) \quad u_h(t)\in V_h, \quad \langle u_h'(t)+A_h(t)u_h(t)-f_h(t), v-u_h(t)\rangle_h + \\ j_{\varepsilon h}(t,v)-j_{\varepsilon h}(t,u_h(t)) \ge 0 \quad \forall\, v \in V_h,$$

(при $\varepsilon=0$ задачи (P_ε) и $(P_{\varepsilon h})$ переходят в задачи (P_0) и (P_{0h}) соответственно). Далее показывается, что задача $(P_{\varepsilon h})$ вкладывается в семейство задач (P_a) и условия $A_1)$—$A_6)$ выполняются равномерно по ε и h. Доказана

Теорема 9. *Пусть* u *и* u_h *— решения задач* (P) *и* $(P_{\varepsilon h})$ *соответственно, выполнены условия* $(R_1)-(R_5)$ *и* $\varepsilon = O(h^2)$. *Тогда* $\|u-u_h\|_{E(0,T)} \le c\,h$.

После дискретизации по t задачи $(P_{\varepsilon h})$ неявным методом Эйлера в *п. 3.2* получается сеточная схема: *найти функцию* $u_{h\tau} : \omega_\tau \to V_h$ *такую, что* $u_{h\tau}(t_{-1}) = u_{0I}$ *и для* $n=\overline{0,N}$

$$(P_{\varepsilon h\tau}) \quad u_{h\tau}(t_n)\in V_h, \quad \langle\big(u_{h\tau}(t_n)-u_{h\tau}(t_{n-1})\big)/\tau + A_h(t_n)u_{h\tau}(t_n) - \\ - f_h(t_n), v-u_{h\tau}(t_n)\rangle_h + j_{\varepsilon h}(t_n,v) - j_{\varepsilon h}(t_n,u_{h\tau}(t_n)) \ge 0 \quad \forall\, v\in V_h.$$

где $\tau = T/N$, $\omega_\tau = \{t_n, n = \overline{0, N}\}$. Пусть $\hat{u}_{h\tau}$— кусочно-линейное восполнение сеточной функции $u_{h\tau}$. Доказана

Теорема 10. *Пусть выполнены условия* $(R_1) - (R_5)$. *Тогда решение* $u_{h\tau}$ *задачи* $(P_{\varepsilon h\tau})$ *существует и определяется единственным образом. Кроме того, если* u *— решение задачи* (P) *и* $\varepsilon = O(h^2)$, *то* $\|u - \hat{u}_{h\tau}\|_{E(0,T)} \leq c\,\big(h+\tau\big)$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Для параболических вариационных неравенств с препятствием внутри области с квазилинейным пространственным оператором

1. предложены эквивалентные формулировки задачи в виде неравенства без ограничений с выпуклым липшиц-непрерывным функционалом и в виде параболического уравнения с разрывной слабой нелинейностью;

2. получены оценки точности методов регуляризации и штрафа;

3. получены оценки устойчивости коинцидентного множества решения к возмущению правой части и начального условия;

4. построена неявная схема метода конечных элементов с численным интегрированием для приближенного решения задачи; получена оптимальная оценка ее погрешности в энергетической норме;

5. получены оптимальные оценки погрешности в энергетической норме двух известных сеточных схем приближенного решения задачи.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Денисова А. И. Операторы точного штрафа для параболических вариационных неравенств // Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского государственного университета 2004 года. Тезисы докладов. Казань: Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина, 2004. С. 64–65.

2. Денисова А. И., Даутов Р. З. Операторы точного штрафа для параболических вариационных неравенств // Матер. Пятого Всеросс. семинара «Сеточные методы для краевых задач и приложения». Казань: Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина, 2004. С. 62–67.

3. Денисова А. И. Устойчивость коинцидентного множества параболических вариационных неравенств // Матер. Седьмой межд. Казанской летней школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». Казань: Издательство Казанского мат. общества, 2005. С. 55–57.

4. Денисова А. И. Эквивалентные формулировки параболических вариационных неравенств с препятствием внутри области и их приложения // Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского государственного университета 2005 года. Сборник статей. Казань: Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина, 2005. С. 68–70.

5. Денисова А. И., Даутов Р. З. Приближенный метод определения свободной границы в одномерной параболической задаче с препятствием // Материалы Шестого Всероссийского семинара «Сеточные методы для краевых задач и приложения». Казань: Казан. гос. ун-т, 2005. С. 77–81.

6. Михеева А. И., Даутов Р. З. Оценки точности неявной схемы МКЭ для нестационарной задачи с препятствием внутри области // Материалы Седьмого Всероссийского семинара «Сеточные методы для краевых задач и приложения». Казань: Казан. гос. ун-т, 2007. С. 205–207.

7. Даутов Р. З., Михеева А. И. О точности метода штрафа для параболи-

ческих вариационных неравенств с препятствием внутри области // Изв. Вузов. Математика. 2008. № 2. С. 41–47.

8. Даутов Р. З., Михеева А. И. Операторы точного штрафа для параболических вариационных неравенств с препятствием внутри области // Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Казан. гос. ун-та. 2003-2007 гг. / Под ред. А. М. Елизарова. Казань: Казан. гос. ун-т, 2008. С. 318–328.

9. Михеева А.И. Параболические вариационные неравенства: операторы точного штрафа, регуляризация и устойчивость коинцидентного множества // Труды 51-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Часть VII. Управление и прикладная математика. 2008. Т. 1. С. 130–133.

10. Даутов Р. З., Михеева А. И. Операторы точного штрафа и регуляризация параболических вариационных неравенств с препятствием внутри области // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 1. С. 77–84.

11. Михеева А. И., Даутов Р. З. Об устойчивости коинцидентного множества решения параболического вариационного неравенства с препятствием // Изв. Вузов. Математика. 2010. № 3. С. 88–91.